Concursul „Pro-Performanța"
ediția a V-a
2 noiembrie 2019
Barem Clasa a V-a

Problema 1

Mutam in prima gramada 4 pietre din ultima gramada si 2 din penultima. In total 6. **(7 pct)**

Problema 2 a Un copil nu poate ghici ce fructe se află în 2 cutii pentru că ar ști ce fruct se află în cea de a treia, iar un singur copil a ghicit fructele din cele 3 cutii. **(1 pct.)**
Dacă unul dintre copii rămași ghicește doar conținutul uneia dintre cutii, atunci am avea și al doilea copil care a ghicit ce fruct se află într-o singură cutie, ceea ce nu este posibil. **(1 pct.)**
Deci ceilalți patru copii nu au ghicit ce fructe se află în cutie. **(1 pct.)**
Informațiile sunt suficiente pentru a stabili că ceilalți 4 copii nu au ghicit fructul din niciuna din cutii. **(1 pct.)**

Problema 2 b.

I. Se poate călători de pe Jupiter pe Uranus prin intermediul curselor Jupiter-Marte și Marte-Uranus. **(1 pct.)**
II. Nu se poate călători de pe Terra pe Marte deoarece, de pe Terra se poate ajunge pe Mercur sau pe Pluto, de pe Mercur se poate ajunge pe Venus, iar de pe Venus nu se poate ajunge pe altă planetă. De pe Pluto se poate ajunge pe Venus sau pe Mercur. Deci nu se poate călători de pe Terra pe Marte **(2 pct.)**

Problema 3

Caz I Alina minte, atunci Costel spune adevarul, Bogdan minte, Dan si Elena sau mint amandoi, sau spun adevarul. Nu convine. **(3 pct)**

Caz II Daca Alina spune adevarul, atunci Costel minte, Bogdan spune adevarul, Dan si Elena mint. **(4 pct)**

Problema 4

Daca b=4k, atunci a=12k. **(2 pct)**

2a-b:4=n, deci 23k=n, n numar de trei cifre consecutive. **(2 pct)**

Prin verificari vedem ca 23x15=345. Deci k=15. **(2 pct)**

a=180, b=60. **(1 pct)**

Concursul „Pro-Performanța"
ediția a V-a
2 noiembrie 2019
Barem clasa a VI-a

Problema 1

Dacă Pinocchio ar spune adevărul, prima dată, atunci nasul său ar avea 0 cm și cum orice minciună îi dublează nasul, nu ar putea ajunge să mai aibă nasul de 10 cm. Deci prima dată el minte și nasul său are 2 cm. **(2 pct.)**

Deci, prima oară minte. Dacă, în continuare, ar spune adevărul, atunci nasul său ar deveni 1 cm și este în situația de la început. Deci în continuare, el minte nasul său ajunge să aibă 4 cm. **(1 pct.)**

Dacă spune un adevăr, nasul său ar ajunge de 3 cm, minte apoi și nasul ajunge de 6 cm, spune un adevăr și nasul ajunge 5 cm, iar cu o minciună nasul ajunge de 10 cm. **(2 pct.)**

Dacă nasul are 4 cm și continuă să mintă, nasul său ar ajunge de 8 cm și ar trebui să spună 3 adevăruri, urmate de o minciună pentru ca nasul său să ajungă la 10 cm. Dacă nasul ajunge la 8 cm și continuă să mintă, nasul ar ajunge la 16 cm și ar trebui să spună 6 adevăruri pentru ca nasul sa devină 10 cm. **(1 pct.)**

Deci numărul minim de adevăruri pe care poate să le spună este 2. **(1 pct.)**

Problema 2

Din 1) se deduce că un atlet de la echipa C nu poate ocupa locul 1 sau locul 2, deci pe locul 3 se află un atlet de la echipa C **(1 pct.)**

Cum locul 3 a fost ocupat de un atlet de la echipa C, din 2) rezultă că locurile 1 și 2 au fost ocupate de atleți de la echipa A, respectiv B **(1 pct.)**

Cum locurile 1, 2 și 3 au fost ocupate de atleți de la echipa A, B și respectiv C, din 3) se obține că locurile 4 și 5 au fost ocupate de atleți de la echipa C. **(1 pct.)**

Astfel, din 2) se obține că locurile 6, 7, 8, 9 au fost ocupate de atleți de la echipele A, B, A și respectiv B. **(1 pct.)**

Deci clasamentul a fost ocupat de atleți de la echipele: A, B, C, C, C, A, B, A, B. **(1 pct.)**

Astfel echipa A are 30 de puncte, echipa B are 24 de puncte, iar echipa C are 36 de puncte. **(1 pct.)**

Clasamentul pe echipe este: C, A, B. **(1 pct.)**

Problema 3

Dintre Ionel si Violeta, unul spune adevarul si unul minte. **(2 pct)**

Ceilalti doi spun adevarul. **(2 pct)**

Daca Paul si Maria spun adevarul, inseamna ca Violeta a scris. **(2 pct)**

Ea e si cea care a mintit. **(1 pct)**

Problema 4

Numărul divizorilor lui $2^m \cdot 5^n$ este $(m+1)(n+1)$, iar numărul divizorilor lui 3^n este $n+1$. **(2 pct.)**

Atunci $(m+1)(n+1)=(n+1)+6$, de unde $m(n+1)=6$. **(2 pct.)**

Obținem soluțiile $n=0$, $m=6$; $n=1$, $m=3$; $n=2$, $m=2$ și $n=5$, $m=1$. **(3 pct.)**

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
PRO-PERFORMANȚA
BAREM CLASA A VII-A
2 NOIEMBRIE 2019

1. Din 5) și 2) rezultă că toți peștii de talie mare sunt vrednici de dispreț (i)........................2p

Din 1) toți rechinii sunt siguri că sunt puternici........................1p

Din 3) toți rechinii au trei rânduri de dinți........................1p

Din 6) niciun rechin nu este disprețuit (ii)........................1p

Din (i) și (ii) niciun pește de talie mare nu e rechin (iii)........................1p

Din 4) și (iii) toți peștii de talie mare sunt prieteni cu copiii........................1p

2. Sunt 7 afirmații și au dispărut 5 mere, deci 5 afirmații sunt false și 2 adevărate........................1p

La al doilea rând de întrebări s-au făcut 4 afirmații. Dacă prima este adevărată, atunci a doua este falsă și invers, dacă a doua este adevărată, atunci prima este falsă. Dacă a treia afirmație este adevărată, atunci a 4-a este falsă și invers, dacă a 4-a este adevărată, atunci a treia este falsă, deci cele 2 afirmații adevărate s-au făcut la al doilea rând de întrebări........................2p

Deci primele 3 afirmații sunt toate false,astfel că fiecare copil a luat cel puțin câte un măr,astfel s-au luat 3 mere (3m)........................1p

Rezultă că a doua afirmație a Luciei este falsă, deci Lucia a luat încă un măr(4m), iar ultima afirmație a Mariei este adevărată......1p

Dacă a doua afirmație a Mariei ar fi adevărată ,atunci Alex ar fi luat cel puțin 3 mere, ceea ce ar însemna că s-au luat deja 6 mere-fals.Deci a 2-a afirmație a Mariei este falsă,Maria a mai luat încă un măr(5m), a doua afirmație a lui Alex e adevărată.Deci Maria a luat 2 mere, Alex un măr și Lucia 2 mere........................2p

3. Din 1) rezultă $A\underline{x}M$ sau $M\underline{x}A$ pozițiile pentru Alina și Mihai........................1p

Din 2) rezultă $L\underline{x}\underline{y}T$, $T\underline{x}\underline{y}L$ sau $L\underline{x}\underline{y}\underline{z}T$, $T\underline{x}\underline{y}\underline{z}L$ 1p

Cum Mihai nu poate să stea lângă un loc liber, rezultă că Mihai are alături alți doi copii (I), sau stă la un capăt și imediat lângă el un alt copil (II). Deci locul dintre Alina și Mihai este ocupat de un alt copil: Toma sau Luca........................1p

(I) nu este posibilă ,deoarece între Luca și Toma sunt cel puțin două locuri, deci lângă Mihai va fi locul liber........................2p

Deci Mihai stă la una dintre margini,imediat lângă el stă Luca,iar **pe locul 3**, cel din mijloc, va sta **Alina**,apoi liber și apoi Toma(de la stânga la dreapta,sau de la dreapta la stânga)........................2p

Observație: nu este necesară precizarea pozițiilor tuturor copiilor, doarece se cere doar persoana de pe locul 3.

4. Înmulțind cele 3 relații membru cu membru obținem $(xyz)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ și cum $xyz \geq 0 \Rightarrow xyz = 60$ 4p

Dar $xy = 12 \Rightarrow 12z = 60 \Rightarrow z = 5$ 1p

Dar $xz = 15 \Rightarrow 15y = 60 \Rightarrow y = 4$ 1p

Dar $yz = 20 \Rightarrow 20x = 60 \Rightarrow x = 3$ 1p

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
PRO-PERFORMANȚA

BAREM CLASA A VIII-A

2 NOIEMBRIE 2019

1. $\begin{cases} b+f=50 \\ \dfrac{60}{100}b=\dfrac{90}{100}f \end{cases}$,unde b =numărul băieților și f =numărul fetelor..3p

De unde$\Rightarrow$ $b=30, f=20$ 2p

Dansează 18 perechi=$\dfrac{3}{5}\cdot 30$ sau $\dfrac{9}{10}\cdot 20$, deci **36 persoane**..2p

2. Sunt 15 echipe, fiecare joacă 14 meciuri, deci în total se vor juca $\dfrac{15\cdot 14}{2}=105$ meciuri.............................1p

Fiecare meci dă 4 puncte, deci în total , la finalul turneului suma punctajelor va fi 420 puncte.....................1p

Cum ultima echipă are 21 de puncte și punctajele p_i sunt diferite$\Rightarrow \sum_{i=1}^{15} p_i \geq 21+22+...+35=420$, dar suma este exact 420, deci toate echipele au numărul minim de puncte posibil în condițiile date, iar echipa de pe locul întâi are 35 de puncte 2p

Cum fiecare echipă ar fi putut obține 3 puncte /meci, punctajul maxim pe care o echipă l-ar fi putut obține ar fi fost $14\cdot 3=42$ puncte, deci echipa de pe locul 1 a pierdut 7 puncte..1p

Numărul punctelor ce se pierd la o înfrângere este 3-1=2 ,deci numărul total de puncte pierdute din înfrângeri va fi par. La un meci egal se pierde un punct (3-2). Cum echipa de pe primul loc a pierdut un nr impar (7) de puncte, iar nr total de puncte pierdute din înfrângeri este par(maxim 6)$\Rightarrow$echipa de pe locul 1 a făcut cel puțin un meci egal...2p

3. a) Pentru n=8, câștigă persoana aflată pe locul cu numărul 1 (la prima rundă se elemină toate persoanele aflate pe locuri pare, apoi, printr-o renumerotare, din cele 4 persoane rămase se elimină din nou cele aflate pe locuri pare,rămân 2 persoane, renumerotăm,se elimină cea de pe locul 2) 1p

b-c) *OBS* 1.Dacă $n=2^k, k\in\mathbb{N}$, atunci câștigă cel aflat pe locul cu numărul 1..2p

2. Dacă $n=2^k+l$ $,k,l\in\mathbb{N}$ unde $2^k\leq n<2^{k+1}$, atunci, după ce s-au parcurs $2l$ pași , deci s-au eliminat l persoane, persoana de pe locul $2l+1$ va juca rolul celei aflate pe locul 1 în cazul $n=2^k, k\in\mathbb{N}$, deci va fi persoana câștigătoare...2p

Dacă $n=20=2^4+4$, câștigă persoana aflată pe locul cu numărul 9 ....1p

Dacă $n=41=2^5+9$, câștigă persoana aflată pe locul cu numărul 19 ....1p

Observație: se va acorda punctajul maxim și în cazul în care elevul a prezentat descriptiv etapele eliminărilor succesive și a obținut răspunsul corect.

4. $n^2+2n+1<n^2+2n+3<n^2+4n+4$ $\forall n\in\mathbb{N}$(pt. că $1<3$ și $2n+1>0$ 4p

Deci $(n+1)^2<n^2+2n+3<(n+2)^2, n\in\mathbb{N}$ 1p

Fiind situat între două pătrate perfecte consecutive, n^2+2n+3 nu este pătrat perfect....................................1p

Deci $\sqrt{n^2+2n+3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$...1p

Concursul „Pro-Performanţa"
ediţia a V-a
2 noiembrie 2019
Barem Clasa a IX-a

1. O porţiune de drum drept (sau o reuninune de porţiuni de drum drept drept) în lungime de 1km este parcursă în 15 minute, deci 1km dus-întors pe drum drept este parcurs în 30 de minute. **(1 pct)**
O porţiune (sau o reuniune de porţiuni) de drum în urcare în lungime de 1km este parcursă în 20 de minute. **(1 pct)**
O porţiune (sau o reuniune de porţiuni) de drum în coborâre în lungime de 1km este parcursă în 10 de minute. **(1 pct)**
Aşadar 1km dus-întors în urcare (sau în coborâre) este parcurs în 10+20=30 de minute. **(2 pct)** Aşadar Maria parcurge întotdeauna 1km dus-întors în 30 de minute. **(1 pct)**
Ea parcurs 10km dus-întors, deci i-au fost necesare 5 ore. **(1 pct)**

2. În urma primei aruncări, din 6 cazuri posibile, 3 sunt favorabile: dacă îi pică 1, 3 sau 5. **(2 pct)**
Dacă îi pică 6, atunci mai aruncă zarul încă o dată şi din 6 cazuri, 3 sunt favorabile pentru suma impară: 1, 3 sau 5. **(2 pct)**

Aşadar probabilitatea este (3+1/2)/6 = 7/12. **(3 pct)**

3. Presupunem că toate persoanele energice şi responsabile sunt parapantiste. **(1 pct)**
Atunci, din 5), ele au şi probleme de echilibru. **(1 pct)**
Fiind şi responsabile, din 7), rezultă ca aceste persoane nu fac escaladă. **(1 pct)**
Din 2), ele sunt urmărite cu atenţie în trafic. **(1 pct)**
În continuare, din 9), ele sunt toate ochelariste, iar din 3), ele poartă căşti. **(1 pct)**
Deci din 8) ele sunt timide. Din 6), ţinând cont ca ele nu fac escaladă, pot sa bea din sticlă, deci ca să nu avem contradicţie in 4), ele nu beau suc de morcovi. **(1 pct)**
Deci din 1) rezultă ca persoanele nu sunt energice, contradicţie. În concluzie, afirmaţia este falsă. **(1 pct)**

4. Cum $0 \le \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 1$, atunci $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ **(2 pct)**

şi $\{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\} = 1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$ **(2 pct)**
Cum $2\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}+1$, atunci $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\} < \{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\}$. **(3 pct)**

Concursul interjudeţean de matematică
PRO-PERFORMANŢA
Ediţia a V-a, 2 noiembrie 2019
Clasa a X-a (Soluţii şi barem)

1. Observăm mai întâi că $\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]=0$ şi deci ecuaţia devine $\left[10\sqrt{n+1}-10\sqrt{n}\right]=2$.................. (1p)
   Atunci $10\sqrt{n+1}-10\sqrt{n}\in[2,3)$ sau echivalent $\frac{10}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\in[2,3)$.................. (1p)
   Funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\frac{10}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ este strict descrescătoare .... (1p)
   Se verifică $f(2)>3$, $f(6)<2$, $f(3),f(5)\in[2,3)$ .... (3p)
   Din monotonie, soluţia finală este $n\in\{3,4,5\}$.................. (1p)
2. Numărul de olimpiade diferite la care au participat este 4 $(3+1+2+2=2\cdot 4)$ şi exact 2 elevi au participat la chimie. Ioan nu a participat la matematică (la care au participat 3 elevi) iar Popescu nu a participat la olimpiadele la care au fost alţi doi elevi (unul dintre ei a fost sigur la matematică). Deci Ioan este aceeaşi persoană cu Popescu. Ionescu, Georgescu şi Angelescu sunt cei 3 care au fost la matematică.................. (2p)
   Andrei şi Ionescu sunt printre cei care au participat la matematică şi deci Andrei şi Ionescu au participat la matematică şi istorie. Există doi elevi care au participat la chimie. Rezultă că Ioan Popescu a fost sigur la chimie......... (2p)
   Matei a participat la chimie deci nu poate fi Ionescu şi nici Georgescu. Matei este Angelescu. .... (1p)
   Andrei şi Ionescu la fel Ştefan şi Georgescu sunt persoane diferite. Deci Ionescu este Ştefan iar Georgescu este Andrei .... (1p)
   In final, Ioan Popescu a fost la fizică şi chimie, Ştefan Ionescu la matematică şi la istorie, Andrei Georgescu la matematică şi la istorie iar Matei Angelescu la matematică şi la chimie. .... (1p)
3. În ordinea D-A-E-C-B cele două poziţii corecte trebuie sa fie alăturate, deoarece, în caz contrar, una dintre poziţiile corecte va fi urmată sau precedată în mod inevitabil de o poziţie care va fi tot corectă .... (2p)
   Rezultă că una dintre perechile D-A, A-E, E-C sau C-B este plasată corect. Perechile A-E şi E-C sunt eliminate deoarece poziţiile lor nu permit existenţa unei alternări corecte .... (1p)
   Dacă perechea D-A este bine plasată, atunci ordinea corectă va fi D-A-C-B-E, sau D-A-B-E-C .... (1p)
   Ambele ordonări sunt eliminate de primul comentariu .... (1p)
   Perechea bine plasată va fi C-B şi atunci ordinea corectă va fi A-E-D-C-B sau E-D-A-C-B .... (1p)
   Ordinea A-E-D-C-B este eliminată de primul comentariu. Răspunsul corect este E-D-A-C-B .... (1p)
4. (a) Dacă $n>20$, folosind principul cutiei (de exemplu), obţinem că în orice moment există un elev care are cel puţin două bomboane. Deci "jocul" nu se poate termina .... (1p)
   (b) Dacă $n=20$, numerotăm elevii cu $e_1,\ldots,e_{20}$ în sens direct şi presupunem că elevul e_1 are la început cele 20 de bomboane. Notăm cu i "valoarea" fiecărei bomboane care se află la momentul curent la elevul e_i şi cu S suma tuturor acestor valori la momentul curent. La început această valoare este $S=20$. .... (1p)
   Să vedem ce se întâmplă cu S după ce e_i oferă câte o bomboană vecinilor lui. Dacă $i=1$ atunci S se măreşte cu 20 pentru că $-1-1+2+20=20$. Dacă $i=20$ atunci S descreşte cu 20 pentru că $-20-20+1+19=-20$. Pentru un i oarecare, S nu se modifică pentru că $-i-i+(i-1)+(i+1)=0$ .... (2p)
   Valoarea lui S va fi în orice moment (deoarece valoarea iniţială este 20) multiplu de 20. Dacă "jocul" s-ar termina, atunci fiecare elev ar avea exact o bomboană şi deci $S=1+2+\cdots+20=210$ care nu este multiplu de 20. Contradicţie... (1p)
   (c) Dacă la un moment dat un elev oferă unui coleg o bomboană, presupunem că această bomboană va fi schimbată mereu între cei doi (când se face un schimb între ei). Deci această bomboană va rămâne blocată intre cei doi. Deoarece $n<20$, şi sunt 20 de perechi care pot schimba bomboane, va exista una care sigur nu va schimba bomboane. .... (1p)
   Dacă "jocul" nu s-ar termina niciodată vor exista elevi care vor oferi bomboane de o "infinitate" de ori. Începând de la o pereche care nu a schimbat bomboane, si mergând în sens direct de la elev la elev, va exista o pereche (e_i,e_{i+1}) astfel încât e_i a oferit de un număr finit de ori bomboane, iar e_{i+1} de un număr infinit de ori. Imposibil deoarece e_i s-a oprit în a oferi bomboane, dar continuă să primească de la e_{i+1}. Deci "jocul" se termină.................. (1p)

Concursul „Pro-Performanța”
ediția a V-a
2 noiembrie 2019
Barem Clasele XI-XII

1. Fie băieții b1, b2 și fetele f1, f2. Atunci avem 16 cazuri posibile (băieților le pot plăcea fetele în 2*2 = 4 moduri și analog fetelor le pot plăcea băieții in 4 moduri). **(2 pct)**
   Din aceste cazuri doar două sunt favorabile: când lui b1 îi place de f1 și lui f1 îi place de b1 (și deci și lui b2 îi place de f2 și lui f2 îi place de b2) **(2 pct)**
   sau când lui b1 îi place de f2 și lui f2 îi place de b1 (și deci și lui b2 îi place de f1 și lui f1 îi place de b2). **(2 pct)**
   În concluzie probabilitatea este de 1/8. **(1 pct)**

2. În urma primei aruncări, sunt 6 variante posibile. 1 sau 3 sunt cazuri favorabile. **(2 pct)**
   Dacă pică 4, în urma celei de-a doua aruncări, din 6 cazurile posibile, 3 sunt favorabile (când pică 1, 3 sau 5). **(2 pct)**
   Dacă pică 5, atunci avem pentru urmatoarele aruncări 36 de variante posibile dintre care 18 sunt favorabile. **(2 pct)**
   Finalizând, probabilitatea ca suma să fie impară este (2 + 1/2 +1/2)/6, adică 50%. **(1 pct)**

3. Presupunem că toate persoanele energice și responsabile sunt parapantiste. **(1 pct)**
   Atunci, din 5), ele au și probleme de echilibru. **(1 pct)**
   Fiind și responsabile, din 7), rezultă ca aceste persoane nu fac escaladă. **(1 pct)**
   Din 2), ele sunt urmărite cu atenție în trafic. **(1 pct)**
   În continuare, din 9), ele sunt toate ochelariste, iar din 3), ele poartă căști. **(1 pct)**
   Deci din 8) ele sunt timide. Din 6), ținând cont ca ele nu fac escaladă, pot sa bea din sticlă, deci ca să nu avem contradicție in 4), ele nu beau suc de morcovi. **(1 pct)**
   Deci din 1) rezultă ca persoanele nu sunt energice, contradicție. În concluzie, afirmația este falsă. **(1 pct)**

4. Dacă toți minorii de ordinul n-1 ai lui A sunt pari. **(2 pct)**
   atunci A* are toate elementele pare, deci $2^n / \left(\det A^*\right)$. **(2 pct)**
   Cum det(A)* det(A*) = $\left(\det A\right)^n$ avem deci det(A*) = 2^{n-1}, ceea ce contrazice $2^n / \left(\det A^*\right)$. **(3 pct)**