CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A V-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. La o întrecere de alergări participă cinci sportivi A, B, C, D, E. Oricare doi sportivi au ocupat locuri diferite. După cursă situaţia este urmatoarea:

-E nu a fost primul;

-A nu a fost nici primul, nici ultimul;

-între C şi D a sosit exact un sportiv;

-B a sosit imediat după E;

-C nu a fost al treilea.

Determinaţi ordinea în care au sosit sportivii.

2. Lucia, Ilinca şi Răzvan sunt 3 fraţi. Dacă următoarele afirmaţii sunt toate adevărate, care dintre ei este cel mai tânăr?

-Lucia este cea mai în vârstă;

-Răzvan nu este cel mai în vârstă;

-Ilinca nu e cea mai tânără.

3. Alecsia preferă în fiecare anotimp un alt gen de film şi ascultă un alt gen de muzică. Se ştie că:

1) Alecsia nu ascultă vara muzica simfonică, dar urmăreşte filme de acţiune.

2) Primăvara, Alecsia ascultă muzică disco şi nu urmăreşte comedii.

3) Toamna, Alecsia nu ascultă muzică rock şi nu urmăreste desene animate.

4) În anotimpul în care urmăreşte filme istorice, Alecsia ascultă muzică simfonică.

5) Alecsia nu ascultă muzică populară nici iarna, nici vara.

Precizaţi ce gen de muzică şi ce fel de filme preferă Alecsia în fiecare anotimp.

4. Scriem în ordine descrescătoare numerele de patru cifre diferite care au suma cifrelor 10. Determinaţi ce poziţie are numărul 2017 în această scriere.

(G.M. 2/2018)

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A VI-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. Pentru orice număr natural $r > 1$, numim "pas" una dintre următoarele transformări pe care i le aplicăm acestuia:
-dacă este divizibil cu 3, îl împărţim la 3;
-dacă nu este divizibil cu 3, îi adăugăm 1.
Orice şir de transformări se opreşte când se ajunge la 1. De exemplu, $5 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1$.
a) Din câţi paşi se ajunge de la 2 la 1? Dar de la 3? Dar de la 12?
b) Câte numere se transformă în 7 după un singur pas? Dar în 8?
c) Care este cel mai mare număr care din 4 paşi se transformă în 1? Dar din n paşi?
d) Câte numere se transformă în 1 după exact 4 transformări?

2. La o întrecere de alergări participă cinci sportivi A, B, C, D, E. Oricare doi sportivi au ocupat locuri diferite. După cursă situaţia este următoarea:
-E nu a fost primul;
-A nu a fost nici primul, nici ultimul;
-între C şi D a sosit exact un sportiv;
-B a sosit imediat dupa E;
-C nu a fost al treilea.
Determinaţi ordinea în care au sosit sportivii.

3. Lucia, Ilinca, Miruna şi Ştefan stau în ordinea aceasta, în şir indian. Lucia îi vede pe ceilalţi trei, Ilinca pe ceilalţi doi, Miruna pe Ştefan şi Ştefan pe nimeni. Celor patru le-au fost puse pe cap câte o pălărie astfel încât niciunul nu ştie ce culoare are propria pălărie, dar le vede pe cele din faţa sa. Cei patru mai ştiu că pălăriile au următoarele culori: una este albastră, una este verde, una este roşie şi cealaltă este ori roşie, ori albastră ori verde. Cei patru copii sunt întrebaţi, în ordinea Lucia-Ilinca-Miurna-Ştefan, ce culoare are pălăria proprie şi în mod surpinzător toţi patru au răspuns în mod corect, fiecare auzind răspunsurile date de ceilalţi. Care sunt cei doi copii care au pălăriile de aceeaşi culoare?

4. Numărul 2^n are 90 de cifre. Arătaţi că cel puţin una dintre cifre se repetă de cel puţin zece ori.
GM 10/2017

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A VII-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. Oricare număr natural mai mare decât 1 poate fi transformat în 1 prin următorii paşi:
-dacă este divizibil cu 3, îl împărţim la 3;
-dacă nu este divizibil cu 3, îi adăugăm 1.
Orice şir de transformări se opreşte când se ajunge la 1. De exemplu, $5 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1$.
a) Din câţi paşi se ajunge de la 2 la 1? Dar de la 3? Dar de la 12?
b) Câte numere se transformă în 7 după un singur pas? Dar în 8? Dar în $3k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$? Dar în $n \neq 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$?
c) Care este cel mai mare număr care din 4 paşi se transformă în 1? Dar din n paşi?
d) Câte numere se transformă în 1 după exact 4 transformări?

2. Lucia, Ilinca, Miruna şi Ştefan stau în ordinea aceasta, în şir indian. Lucia îi vede pe ceilalţi trei, Ilinca pe ceilalţi doi, Miruna pe Ştefan şi Ştefan pe nimeni. Celor patru le-au fost puse pe cap câte o pălărie astfel încât niciunul nu ştie ce culoare are propria pălărie, dar le vede pe cele din faţa sa. Cei patru mai ştiu că pălăriile au următoarele culori: una este albastră, una este verde, una este roşie şi cealaltă este ori roşie, ori albastră ori verde. Cei patru copii sunt întrebaţi, în ordinea Lucia-Ilinca-Miurna-Ştefan, ce culoare are pălăria proprie şi în mod surpinzător toţi patru au răspuns în mod corect, fiecare auzind răspunsurile date de ceilalţi. Care sunt cei doi copii care au pălăriile de aceeaşi culoare?

3. a) Arătaţi că numerele naturale de la 1 la 8 pot fi aşezate în vârfurile unui cub astfel încât suma numerelor de pe fiecare faţă a cubului sa fie aceeaşi.
b) Există opt numere naturale, diferite două câte două, care să se poată aşeza în vârfurile unui cub, astfel încât suma numerelor de pe fiecare faţă să fie 2018?

4. Dacă $a, b, c > 0$ sunt numere reale şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4034$, demonstraţi că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq 2017$$

GM 1/2017

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A VIII-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. Pentru orice număr natural $r > 1$, numim "pas" una dintre următoarele transformări pe care i le aplicăm acestuia:

-dacă este divizibil cu 3, îl împărţim la 3;

-dacă nu este divizibil cu 3, îi adăugăm 1.

Orice şir de transformări se opreşte când se ajunge la 1. De exemplu, $5 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1$.

a) Din câţi paşi se ajunge de la 2 la 1? Dar de la 3? Dar de la 12?

b) Câte numere se transformă în 7 după un singur pas? Dar în 8? Dar în $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$? Dar în $n \neq 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$?

c) Care este cel mai mare număr care din 4 paşi se transformă în 1? Dar din n paşi?

d) Câte numere se transformă în 1 după exact 4 transformări?

e) Demonstraţi că întotdeauna se ajunge la 1 după un număr finit de paşi, indiferent de numărul ales iniţial.

Prof. Felician Preda, elev Razvan Draghici

2. Şapte oameni aşteaptă în şir indian să intre într-un avion cu şapte locuri. Fiecare pasager are un bilet pe care este înscris locul său. Primul om care intră în avion şi-a pierdut însă biletul şi se aşează pe un loc ales la întâmplare. În continuare, fiecare pasager se va aşeza pe locul înscris pe biletul său dacă acesta este liber sau pe un alt loc liber, ales în mod arbitrar.

a) După ce a intrat a doua persoană putem fi siguri că locul corespunzător persoanei a doua este ocupat?

b) Care sunt locurile pe care ultima persoană se poate aşeza?

c) Care este probabilitatea ca ultima persoană să se aşeze pe locul înscris pe biletul său?

3. Lucia, Ilinca, Miruna şi Ştefan stau în ordinea aceasta, în şir indian. Lucia îi vede pe ceilalţi trei, Ilinca pe ceilalţi doi, Miruna pe Ştefan şi Ştefan pe nimeni. Celor patru le-au fost puse pe cap câte o pălărie astfel încât niciunul nu ştie ce culoare are propria pălărie, dar le vede pe cele din faţa sa. Cei patru mai ştiu că pălăriile au următoarele culori: una este albastră, una este verde, una este roşie şi cealaltă este ori roşie, ori albastră ori verde. Cei patru copii sunt întrebaţi, în ordinea Lucia-Ilinca-Miurna-Ştefan, ce culoare are pălăria proprie şi în mod surpinzător toţi patru au răspuns în mod corect, fiecare auzind răspunsurile date de ceilalţi. Care sunt cei doi copii care au pălăriile de aceeaşi culoare?

4. Determinaţi perechile de numere întregi pentru care:

$$a(a+1) = b(b+2)$$

GM 5/2017

Concursul regional de matematică
PRO-PERFORMANȚA
Ediția a IV-a, 3 noiembrie 2018
Clasa a IX-a

1. O mașină de calcul primește trei numere reale strict pozitive a, b și c și returnează numerele $\frac{a^2}{\sqrt{bc}}, \frac{b^2}{\sqrt{ac}}$ și $\frac{c^2}{\sqrt{ab}}$. Numerele obținute pot fi reintroduse, iar mașina returnează trei numere obținute după aceeași regulă. Dumitru introduce numerele $2, \sqrt{2\sqrt{5}-2}$ și $\sqrt{2\sqrt{5}+2}$. Este posibil ca după un număr finit de pași mașina să returneze numerele $3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}$ și 3?

2. Un hotel are n camere numerotate de la 1 la n. Inițial toate ușile camerelor sunt închise. Unul câte unul, n turiști închid sau deschid ușile astfel: primul turist deschide toate ușile, al doilea turist închide toate ușile camerelor cu numere pare, al treilea turist închide ușa camerei 3, deschide ușa camerei 6, închide ușa camerei 9, etc. Mai precis, turistul k schimbă starea camerei al cărei număr se divide cu k.

   (a) Dacă $n = 10$ care camere vor avea ușile deschise?
   (b) Dacă $n = 20$ care camere și-au schimbat starea de exact două ori.
   (c) Dacă $n = 1000$ câte camere vor avea ușile închise?

3. A și B joacă următorul joc. Într-o cutie se află bile, pe fiecare bilă fiind scris câte un număr natural mai mare sau egal cu 3. Mai întâi A extrage din cutie o bilă. Dacă pe ea este scris numărul n, așează pe o masă un șir de n jetoane (fiecare jeton are o față albă și una neagră), la început toate cu fața albă în sus. La fiecare mutare, alege un jeton alb (care nu se află în capetele șirului) îl elimină și întoarce cele două jetoane vecine celui eliminat. Jucătorul A va obține un punct dacă, după un șir finit de mutări, rămân pe masă doar două jetoane. Dacă acesta nu reușește, jucătorul B primește un punct. Apoi jucătorul B va face același lucru, urmat din nou de A ș.a.. Presupunem că A și B fac mereu cele mai bune mutări posibile.

   (a) Care este cel mai mic număr n pentru care un jucător poate obține două jetoane albe?
   (b) Dacă A extrage numărul 9, iar B extrage numărul 11, câte puncte au obținut cei doi?
   (c) Este posibil ca după un șir finit de mutări ale unui jucător să rămână pe masă două jetoane de culori diferite?
   (d) Dacă A extrage toate numerele impare n cu $3 \leq n \leq 29$ iar B extrage toate numerele pare n cu $4 \leq n \leq 30$, cine a câștigat jocul și cu ce scor?

4. Profesorul de matematică a adus rezultatele testului pe care elevii unei clase l-au dat. El a spus rezultatele parțial. Adică orice elev știe notele celorlalți colegi, dar nu o știe pe a lui. Profesorul le-a mai spus că există cel puțin o notă de 10. După ce le-a dat aceste informații, din minut în minut, elevii care au luat nota 10 și care si-au dat seama de acest lucru, trebuie să le spună (în același timp) și celorlalți.

   (a) După primul minut un elev afirmă că el a luat nota 10. Puteți decide câte note de 10 s-au luat? Justificați!
   (b) Dacă presupunem că sunt doar două note de 10 (elevii nu știu acest lucru) care este numărul minim de minute după care se vor ști cei doi elevi care au obținut nota 10.
   (c) Presupunem că în primele șase minute nimeni nu spune nimic. După 7 minute, un număr de m elevi anunță că au obținut nota 10. Puteți decide cât este m? Justificați!

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare răspuns trebuie explicat.
Timp de lucru 2 ore.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A X-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. Asupra unor şiruri finite de numere putem acţiona prin trei operaţii:

-ADUNAREA : dându-se două şiruri a şi b, atunci şirul $a + b$ este şirul a continuat cu şirul b

De exemplu, dacă $a = (1, 5, 7, 9)$ şi $b = (3, 4, 8)$ atunci $a + b = (1, 5, 7, 9, 3, 4, 8)$.

-INVERSAREA : dându-se un şir a, "inversul" său se notează cu $R(a)$ şi reprezintă şirul scris de la cap la coadă.

De exemplu, dacă $a = (1, 2, 3, 7)$ atunci $R(a) = (7, 3, 2, 1)$.

- Operaţia $S_k(a)$ unde $k \in \mathbb{N}^*$, k mai mic decât numărul elementelor şirului a, care acţionează astfel: primele k numere ale şirului se scriu în ordine inversă şi sunt duse ultimele în şir. De exemplu, dacă $a = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, atunci $S_2(a) = (3, 4, 5, 6, 2, 1)$ iar $S_4(a) = (5, 6, 4, 3, 2, 1)$.

a) Fie $a = (1, 2, 3, 4)$ şi $b = (5, 6, 7)$. Calculaţi $S_3(a + b)$ şi $S_4(S_4(a + b))$.

b) Dacă $a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, precizaţi de câte ori trebuie să aplicăm S_5 pentru a obţine şirul iniţial.

c) Dacă a are lungimea $n, n \in \mathbb{N}^*$ şi k astfel încât $k \geq \frac{n}{2}$. Demonstraţi că după ce aplicăm S_k de patru ori, se va ajunge la şirul iniţial.

2. Pentru orice număr natural $r > 1$, numim "pas" una dintre următoarele transformări pe care i le aplicăm acestuia:

-dacă este divizibil cu 3, îl împărţim la 3;

-dacă nu este divizibil cu 3, îi adăugăm 1.

Orice şir de transformări se opreşte când se ajunge la 1. De exemplu, $5 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1$.

a) Din câţi paşi se ajunge de la 2 la 1? Dar de la 3? Dar de la 12?

b) Câte numere se transformă în 7 după un singur pas? Dar în 8? Dar în $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$? Dar în $n \neq 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$?

c) Care este cel mai mare număr care din 4 paşi se transformă în 1? Dar din n paşi?

d) Câte numere se transformă în 1 după exact 4 transformări?

e) Demonstraţi că întotdeuna se ajunge la 1 după un număr finit de paşi, indiferent de numărul ales iniţial.

3. Cinzeci de oameni aşteaptă în şir indian să intre într-un avion cu cincizeci de locuri. Fiecare pasager are un bilet pe care este înscris locul său. Primul om care intră în avion şi-a pierdut însă biletul şi se aşează pe un loc ales la întâmplare. În continuare, fiecare pasager se va aşeza pe locul înscris pe biletul său dacă acesta este liber sau pe un alt loc liber, ales în mod arbitrar.

a) După ce a intrat a doua persoană putem fi siguri că locul corespunzător persoanei a doua este ocupat?

b) Care sunt locurile pe care ultima persoană se poate aşeza?

c) Care este probabilitatea ca ultima persoană să se aşeze pe locul înscris pe biletul său?

4. Determinaţi partea întreagă a numărului $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3$. Supliment GM 10/2017

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A XI-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. Pe o masă rotundă care se poate roti, se află patru pahare pline şi două pahare goale dispuse circular (cele două pahare goale sunt consecutive). Un om alege de pe masă un pahar plin (nu vede ce alege) şi îl pune la loc. Când este mai probabil ca acel om să aleagă din nou un pahar plin: când alege următorul pahar în sensul invers acelor de ceasornic sau când roteşte masa şi alege un pahar la întâmplare?

2. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:
1. Toate animalele din această casă poartă numele Jim.
2. Orice animal căruia îi place să se uite lung la lună este bun de mascotă.
3. Atunci când eu detest un animal, îl evit.
4. Niciun animal nu este carnivor, în afara celor care vânează noaptea.
5. Niciun animal cu numele Jim nu ezită să ucidă şoareci.
6. Niciun animal nu s-a ataşat vreodată de mine, cu excepţia celor din această casă.
7. Cangurii nu sunt buni de mascote.
8. Numai carnivorele ucid şoareci.
9. Detest animalele care nu sunt ataşate de mine.
10. Animalelor care vânează noaptea le place totdeauna să se uite lung la lună.

Întrebare: Eu evit sau nu evit cangurii?

3. Fie n persoane astfel încât fiecare are exact trei "duşmani" (dacă persoana x "duşmăneşte" persoana y atunci şi persoana y "duşmăneşte" persoana x).

a) Împărţim persoanele în două mulţimi arbitrare A şi B. Fie a numărul de "duşmănii" din mulţimea A (numărul perechilor de persoane care se "duşmănesc" din mulţimea A), şi b numărul perechilor de persoane care se "duşmănesc" din mulţimea B. Dacă o persoană se mută din mulţimea A în mulţimea B, cum se pot modifica a şi b (se măresc, scad, rămân la fel, creşte doar unul etc.)?

b) Putem muta o persoană dintr-o mulţime în alta astfel încât numărul total de "duşmănii" (suma numărului de "duşmănii" din fiecare mulţime) să scadă?

c) Demonstraţi că există o împărţire a celor n persoane în două mulţimi astfel încât fiecare persoană să aibă în mulţimea din care face parte maxim un duşman.

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+1}, n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ PRO-PERFORMANŢA

CLASA A XII-A

3 NOIEMBRIE 2018

1. Pe o masă rotundă care se poate roti, se află patru pahare pline şi două pahare goale dispuse circular (cele două pahare goale sunt consecutive). Un om alege de pe masa un pahar plin (nu vede ce alege) şi îl pune la loc. Când este mai probabil ca acel om să aleagă din nou un pahar plin: când alege următorul pahar în sensul invers acelor de ceasornic sau când roteşte masa şi alege un pahar la întâmplare?

2. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:
1. Toate animalele din această casă poartă numele Jim.
2. Orice animal căruia îi place să se uite lung la lună este bun de mascotă.
3. Atunci când eu detest un animal, îl evit.
4. Niciun animal nu este carnivor, în afara celor care vânează noaptea.
5. Niciun animal cu numele Jim nu ezită să ucidă şoareci.
6. Niciun animal nu s-a ataşat vreodată de mine, cu excepţia celor din această casă.
7. Cangurii nu sunt buni de mascote.
8. Numai carnivorele ucid şoareci.
9. Detest animalele care nu sunt ataşate de mine.
10. Animalelor care vânează noaptea le place totdeauna să se uite lung la lună.

Întrebare: Eu evit sau nu evit cangurii?

3. Fie n persoane astfel încât fiecare are exact trei "duşmani" (dacă persoana x "duşmaneşte" persoana y atunci şi persoana y "duşmăneşte" persoana x).

a) Împărţim persoanele în două mulţimi arbitrare A şi B. Fie a numărul de "duşmănii" din mulţimea A (numărul perechilor de persoane care se "duşmănesc" din mulţimea A), şi b numărul perechilor de persoane care se "duşmănesc" din mulţimea B. Dacă o persoană se mută din mulţimea A în mulţimea B, cum se pot modifica a şi b (se măresc, scad, rămân la fel, creşte doar unul etc.)?

b) Putem muta o persoană dintr-o mulţime în alta astfel încât numărul total de "duşmănii" (suma numărului de "duşmănii" din fiecare mulţime) să scadă?

c) Demonstraţi că există o împărţire a celor n persoane în două mulţimi astfel încât fiecare persoană să aibă în mulţimea din care face parte maxim un duşman.

4. Determinaţi o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = |||x-1|-1|-1|$$

Roxana Goga G.M. 10/2017